Le equazioni di Lagrange

Prof. Ettore Pennestrì

Dipartimento di Ingegneria dell'Impresa
Università Roma Tor Vergata

Cenni di calcolo variazionale

Testi consigliati per approfondimenti

- Lanczos, C, *The Variational Principles of Mechanics*, Dover Publications Inc.
- Kirk, D.E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice-Hall

L'equazione di Eulero-Lagrange

Determinare la funzione $y(x)$, soggetta alle condizioni

$$y(x_1) = y_1 \tag{1a}$$

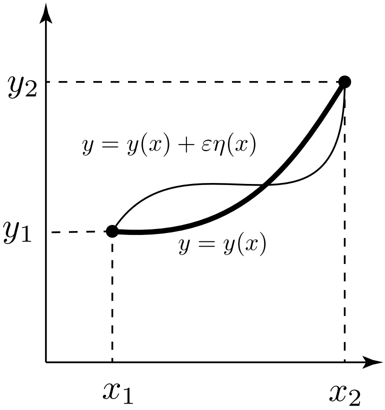
$$y_(x_2) = y_2 \;, \tag{1b}$$

in maniera tale che l'integrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{2}$$

assuma un valore estremo (massimo o minimo).

Possiamo interpretare il problema come la ricerca della curva $y(x)$ che unisce i punti A e B di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2).



Ipotizziamo inoltre che la curva incognita $y(x)$ sia due volte differenziabile. Al fine di risolvere il problema, introduciamo la famiglia di curve

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{3}$$

con $\eta(x)$ funzione arbitrariamente differenziabile per la quale

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{4}$$

e ε parametro incognito che caratterizza ciascun elemento della famiglia di curve.

Sostituendo in

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ al posto di $y(x)$ si ha

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y(x), Y'(x))\mathrm{d}x \tag{5}$$

con

$$Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x) \tag{6}$$

Poiché $y(x)$ costituisce la soluzione del problema, osserviamo che l'integrale $I(\varepsilon)$ dovrà assumere un valore estremo per $\varepsilon = 0$, ovvero

$$I'(0) = 0 \tag{7}$$

Per valutare $I'(\varepsilon)$, si richiama la formula per la derivata di un integrale $I(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} f(x, \varepsilon)\mathrm{d}x$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon} = f(x_2, \varepsilon)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\varepsilon} - f(x_1, \varepsilon)\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\varepsilon} + \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\mathrm{d}x$$

Poiché x_1 ed x_2 <u>non</u> dipendono da ε, si ha:

$$\begin{aligned} I'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\eta + \frac{\partial f}{\partial Y'}\eta' \right) \mathrm{d}x = 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

Sappiamo che imporre $\varepsilon = 0$ equivale a sostituire Y con y, quindi la (8) diventa

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) \mathrm{d}x = 0 \ . \tag{9}$$

Integrando per parti il secondo termine all'interno dell'integrale, tenute presenti le uguaglianze $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, segue:

$$\begin{aligned} I'(0) &= \frac{\partial f}{\partial y'}\eta \bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Equazione di Euler-Lagrange

La relazione ottenuta deve valere per tutte le funzioni $\eta(x)$, dalla precedente segue l'equazione differenziale di Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0} \tag{11}$$

In definitiva, la soluzione $y(x)$ della (11) costituisce la soluzione del problema di stazionarietà dell'integrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\mathrm{d}x$$

Tenuto conto che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial y}(\cdot)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial}{\partial y'}(\cdot)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

la

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

può anche essere scritta nella forma

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0} \tag{12}$$

Caso degenere equazione di Euler-Lagrange: $f(x, y')$

Se la funzione integranda f è indipendente da y, sarà

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

e l'equazione di Euler-Lagrange si semplifica nella seguente

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0} \tag{14}$$

ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1 \tag{15}$$

con C_1 costante arbitraria.

Caso degenere equazione di Euler-Lagrange: $f(y, y')$

Se f non dipende esplicitamente da x, la

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

diventa

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{16}$$

Si può dimostrare che la della precedente può essere espressa nella forma (v. passaggi slide successiva)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f\right) = 0 \tag{17}$$

per cui

$$\boxed{y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C} \tag{18}$$

Passaggi algebrici

Vogliamo dimostrare che l'integrale della (16) è la (18).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=0$$

$$\left(y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)y'+\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial y'}}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'-\cancel{\frac{\partial f}{\partial y'}}\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$$

ovvero

$$y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$$

espressione che coincide con la equazione (16).

Caso degenere equazione di Euler-Lagrange: $f(y')$

Se f è indipendente sia da y sia x, l'equazione di Euler-Lagrange si semplifica ulteriormente a

$$y' = C_2 \tag{19}$$

con C_2 costante funzione di C_1.
Nel caso in questione y' sarà una funzione lineare di x.

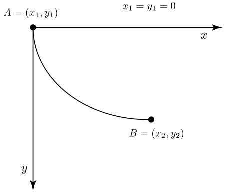
Il problema della brachistocrona

Nel giugno del 1696 Johann Bernoulli formulò il seguente problema:

> *Dati due punti A e B posti su un piano verticale ed una particella M soggetta all'azione della gravità. Si determini la traiettoria AMB che renda minimo il tempo necessario a percorrere la traiettoria medesima.*

Brachistos = Il più corto
Chronos = tempo

Formulazione matematica problema brachistocrona



La velocità della particella lungo la curva vale $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, per cui il tempo impiegato nella discesa vale ($\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x}{v} \qquad (20)$$

con

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

In assenza di attrito,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(y - y_1) \tag{21}$$

per cui, assunto $y_1 = v_1 = 0$:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{22}$$

ed il tempo di discesa diventa

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \tag{23}$$

Dobbiamo determinare la funzione $y(x)$ che renda minimo I.

Nella nostra nomenclatura

$$f(y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \tag{24}$$

L'applicazione dell'equazione di Euler-Lagrange nella forma (18)

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C_1 \tag{25}$$

fornisce

$$\frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1 + y'^2\right)}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} = C_1 \tag{26}$$

ovvero

$$\frac{y'^2 - \left(1 + y'^2\right)}{\sqrt{y\left(1 + y'^2\right)}} = C_1$$

In definitiva

$$y\left(1+y'^2\right)=2c \tag{27}$$

con c costante.

Se poniamo $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\psi$ dalla

$$y\left(1 + y'^2\right) = 2c$$

otteniamo

$$y = c\left(1 + \cos 2\psi\right) \tag{28}$$

Inoltre, essendo $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \cot\psi$ si ha

$$x = a - c\left(2\psi + \sin 2\psi\right) \tag{29}$$

con a costante

Per $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, $x = y = 0$, per cui $a = c\pi$.
La curva che rende minimo il tempo è dunque una **cicloide** avente la seguente equazione parametrica

$$x = c\left[\pi - (2\psi + \sin 2\psi)\right] \tag{30}$$

$$y = c\left(1 + \cos 2\psi\right) \tag{31}$$

Energia potenziale

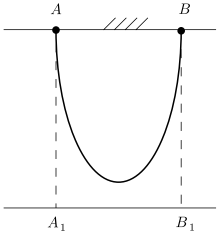
Uno dei più importanti concetti in statica è quello dell'energia potenziale.
Un corpo soggetto ad un campo di forze possiede un'energia di posizione definita quale lavoro conseguente allo spostamento da una configurazione ad un'altra.
Se il campo è **conservativo** il lavoro compiuto è indipendente dalla traiettoria e la funzione lavoro è nota quale **energia potenziale.**

La funzione energia potenziale V possiede le seguenti proprietà:

- le forze del campo si ottengono attraverso la derivata parziale di V rispetto allo spostamento;
- V è stazionaria se il sistema è in equilibrio;
- V assume un minimo se l'equilibrio è stabile.

Il problema della catenaria

Si consideri un filo perfettamente flessibile e massa uniformemente distribuita sospeso tra due punti A e B.



Si voglia calcolare la forma assunta da tale filo l'azione della gravità.

Sia

- ρ è la densità lineare;
- y l'altezza dell'arco elementare di lunghezza $\mathrm{d}s$;
- g l'accelerazione di gravità

l'energia potenziale del filo compreso tra gli estremi A e B vale

$$I = V = \int_A^B \rho g y \mathrm{d}s \tag{32}$$

Poiché $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, omettendo il fattore ρg, avremo

$$\boxed{I = \int_A^B y\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x} \tag{33}$$

Osserviamo che la funzione

$$f(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2} \tag{34}$$

non dipende da x in maniera esplicita.
Pertanto la condizione di stazionarietà dell'integrale da applicare è quella nella forma

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C \tag{35}$$

ovvero

$$y\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

$$\boxed{y'^2 = \frac{y^2}{C^2} - 1} \tag{36}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{C} \tag{37}$$

$$\cosh^{-1}\frac{y}{C} = \frac{x}{C} + D \tag{38}$$

La soluzione del precedente integrale risulta essere

$$y = C\cosh\left(\frac{x}{C} + D\right) \tag{39}$$

Le costanti C e D si determinano imponendo le coordinate dei punti $A \equiv (-h, k)$ e $B \equiv (h, k)$, con h e k quantità positive.

Avremo $D = 0$, $C\cosh\dfrac{h}{C} = k$

Generalizzazione delle equazioni di Euler-Lagrange al caso pluridimensionale

Consideriamo la minimizzazione dell'integrale del tipo

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t\right) \mathrm{d}t \tag{40}$$

in cui $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sono quantità <u>indipendenti</u> (posizioni) e

$$\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{41}$$

le rispettive derivate temporali (velocità).

Al contorno varranno le uguaglianze

$$\delta q_k(t)\big|_{t=t_1} = 0 \tag{42}$$

$$\delta q_k(t)\big|_{t=t_2} = 0 \tag{43}$$

Il problema consiste nel calcolo delle variabili $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tali che l'integrale (40) rimanga stazionario

$$\delta I = 0 \tag{44}$$

Procediamo variando solo q_k e mantenendo costanti tutte le altre variabili q.
Sia $\delta_k I$ la variazione di I per effetto della sola variazione δq_k.
L'equazione di Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{45}$$

garantisce

$$\delta_k I = 0$$

Se si procede variando singolarmente tutte le variabili, otterremo

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I + \cdots + \delta_n I \tag{46}$$

Possiamo affermare che quando le condizioni

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{47}$$

sono <u>simultaneamente</u> soddisfatte, stanti le (46), sarà anche $\delta I = 0$ necessariamente verificata.

“I metodi da me presentati non richiedono costruzioni o ragionamenti di carattere geometrico, ma solo operazioni di carattere algebrico che si succedono secondo uno schema ben definito. Coloro i quali amano l’analisi saranno lieti di vedere la meccanica quale branca dell’analisi medesima e me ne saranno grati per averne esteso i confini".

Per un sistema costituito da N masse elementari il principio di d'Alembert-Lagrange è matematicamente espresso dalla relazione

$$\delta\mathcal{W} = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e - m_k \vec{a}_k \right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \ . \tag{48}$$

Se tale sistema ha n gradi di libertà, scelto l'insieme di coordinate generalizzate $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, si potrà introdurre la trasformazione

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \tag{49}$$

fra le componenti dei vettori posizione $\vec{r}$ e le suddette coordinate generalizzate.

- Velocità delle masse

$$\frac{d\vec{r}_k\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \,, \qquad (50)$$

- Spostamenti virtuali delle masse

$$\delta \vec{r}_k\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \,. \qquad (51)$$

Pertanto, stante quest'ultima relazione, il primo termine della

$$\delta\mathcal{W} = \sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e - m_k\vec{a}_k\right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0$$

che consiste nel lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne, diventa

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_k^e \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\delta q_j \tag{52}$$

Forze generalizzate

Indichiamo con

$$Q_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\delta W}{\delta q_j} \tag{53}$$

la **forza generalizzata** nella direzione corrispondente al moto della j^{ma} coordinata generalizzata

Lavoro virtuale compiuto dalle forze di inerzia:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \ . \tag{54}$$

Ai fini dei successivi sviluppi è necessario tener presente alcune relazioni:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \right]$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \right]$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \right]$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right] \delta q_j$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta\vec{r}_k =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right] \delta q_j$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta\vec{r}_k =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \left(m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) - m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right] \delta q_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) \right] \delta q_j$$

Introdotto il termine

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt}$$

che rappresenta l'energia cinetica delle masse del sistema avremo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \; . \; (j = 1, \ldots, n)} \tag{55}$$

con

$$Q_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\delta W}{\delta q_j} \tag{56}$$

Distinguendo tra forze esterne conservative $\vec{F}^{c}$ e non conservative $\vec{F}^{nc}$ agenti sulla massa k^{ma}, potremo scrivere

$$\vec{F}_k^e = \vec{F}_k^c + \vec{F}_k^{nc} \ . \tag{57}$$

L'espressione della generica forza conservativa può direttamente dedursi differenziando la funzione energia potenziale V associata alla forza che si considera, per cui sarà

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^c \delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \ , \tag{58}$$

Le forze generalizzate che discendono dalle forze non conservative si determineranno attraverso la relazione

$$Q_j^{nc} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \ . \tag{59}$$

Pertanto, le equazioni di Lagrange diventeranno

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{nc} \quad (j = 1, \ldots, n) \ .$$

Pertanto, le equazioni di Lagrange diventeranno

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{nc} \quad (j = 1, \ldots, n) \ .$$

Introdotta la **funzione Lagrangiana**

$$L = T - V \tag{60}$$

essendo,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ ,$$

le equazioni di Lagrange potranno riscriversi nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad (j = 1, \ldots, n) \ .$$

Equazioni di Lagrange per sistemi conservativi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \; .$$

Applicazioni