Il Principio di Gauss

Ettore Pennestrì
Università di Roma Tor Vergata

15 gennaio 2020

1 Introduzione

A Gauss devesi un'interessante estensione del principio dei lavori virtuali (PLV) di d'Alembert, che consente di pervenire alle equazioni della dinamica imponendo la condizione di minimo ad un'apposita funzione.

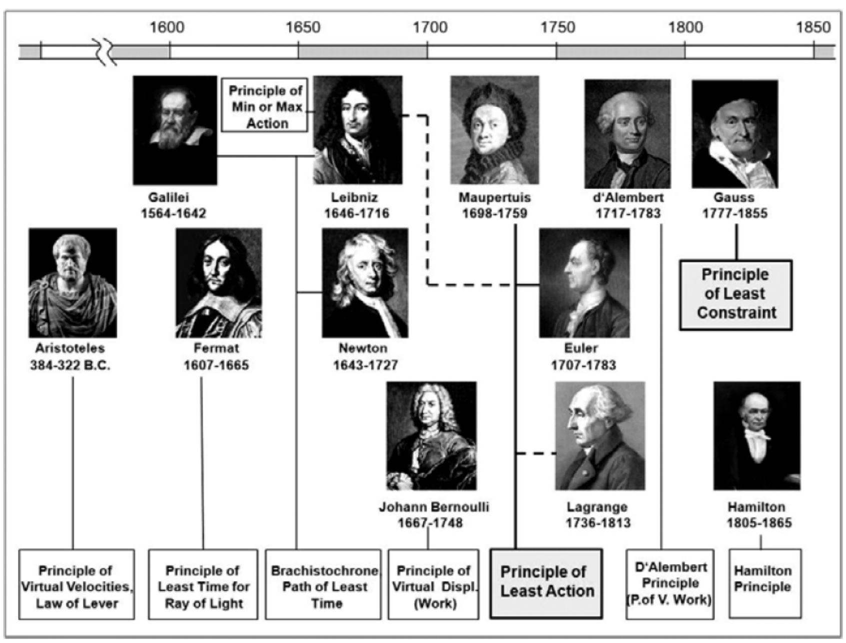

Figura 1: Evoluzione delle formulazioni della Dinamica basati sui principi di estremo [1]

Come testimoniato dalla Figura 1, il contributo di Gauss arriva dopo una serie di autorevoli proposte relative a formulazioni della Dinamica basate su principi di estremo da parte dei più importanti esponenti del mondo della scienza di fine XVIII secolo.

Purtroppo Gauss nell'articolo in cui formula l'omonimo principio fornisce ben pochi indizi su come giunge alla sua formulazione. Ciò rientra nello stile scientifico del *Princeps mathematicorum*, spesso poco propenso a rivelare i dettagli algebrici delle sue scoperte.

Nel presente documento tentiamo di giustificare la formulazione del principio di Gauss in termini elementari. A tal fine, introduciamo i vettori posizione $\vec{r}_k$ e velocità $\vec{v}_k = \dfrac{d\vec{r}_k}{dt}$ attribuibili ad un sistema di punti materiali soggetto, ad un generico istante t, sia a forze esterne che forze vincolari. In corrispondenza all'intervallo infinitesimo di tempo dt, per effetto delle forze esterne $\vec{F}_k^e$ e vincolari $\vec{R}$ presenti nel sistema, si registreranno le *variazioni reali* $d\vec{r}_k$, $d\vec{v}_k$ dei vettori precedentemente introdotti.

Similmente, saranno $d\vec{r}_k{}'$, $d\vec{v}_k{}'$ le *variazioni immaginarie* dei vettori posizione e velocità, rispettivamente, che si registrano al tempo t nel sistema di punti materiali, in corrispondenza degli stessi valori di $\vec{r}_k$ e $\vec{v}_k$, in presenza dei medesimi vincoli, ma sotto l'azione di forze esterne diverse da quelle precedenti.

Se indichiamo con

$$\Psi_j\left(t, r_1, r_2, \ldots, r_N\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

le equazioni che traducono i vincoli cui è sottoposto il sistema di punti materiali analizzato, sussisteranno simultaneamente le uguaglianze ottenute derivando due volte le precedenti rispetto al tempo[1]:

$$\left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_1}\right) \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_2}\right) \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \ldots + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_N}\right) \cdot \frac{d\vec{v}_N}{dt} + L(r, v, t) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_1}\right) \cdot \frac{d\vec{v}_1{}'}{dt} + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_2}\right) \cdot \frac{d\vec{v}_2{}'}{dt} + \ldots + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_N}\right) \cdot \frac{d\vec{v}_N{}'}{dt} + L(r, v, t) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

con $L(r, v, t)$ funzione che dipenderà solo dalle velocità e dalle posizioni al tempo t.

Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene

$$\left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_1}\right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_1{}'}{dt}\right) + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_2}\right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_2}{dt} - \frac{d\vec{v}_2{}'}{dt}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_N}\right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_N}{dt} - \frac{d\vec{v}_N{}'}{dt}\right) = 0 \,, \tag{2}$$

valida per $j = 1, 2, \ldots, m$.

Considerato che, per gli spostamenti virtuali $\delta\vec{r}_k$ del caso effettivo, è possibile stabilire la relazione

$$\left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_1}\right) \cdot \delta\vec{r}_1 + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_2}\right) \cdot \delta\vec{r}_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{r}_N}\right) \cdot \delta\vec{r}_N = 0 \,, \tag{3}$$

[1]Com'è noto, se si derivano rispetto al tempo le equazioni di vincolo $\mathbf{\Psi}(\mathbf{q}, t) = 0$ si ottiene $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{\Psi}_t$ e $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\gamma}$, con $\boldsymbol{\gamma}$ termine quadratico delle velocità. In altri termini, le derivate delle funzioni di vincolo forniscono funzioni lineari nelle accelerazioni.

l'equazione che traduce il PLV

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e - m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right) \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \ , \tag{4}$$

può riscriversi nella forma equivalente

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e - m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right) = 0 \ . \tag{5}$$

Se adesso immaginiamo, diminuendo il numero delle funzioni (1), di eliminare alcuni dei vincoli presenti nel sistema, ed indichiamo con $d\vec{v}_k{}''$ le variazioni reali delle velocità nel nuovo stato con posizioni e velocità delle masse al tempo t sempre pari a $\vec{r}_k$ e $\vec{v}_k$, rispettivamente, su cui agiscono sempre le medesime forze $\vec{F}_k^e$, in analogia con il caso precedente, il PLV porge

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\vec{F}_k^e - m_k \frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right) = 0 \ , \tag{6}$$

relazione che si giustifica osservando che quali spostamenti virtuali $\delta\vec{r}_k$ nella nuova situazione rimangono validi quelli originariamente adottati.

Sottraendo la (5) dalla (6) si ha

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right) = 0 \ . \tag{7}$$

Intendendo per concisione

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right) \\
\left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} \right) \\
\left(\frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k{}''}{dt} - \frac{d\vec{v}_k{}'}{dt} \right)
\end{aligned}$$

la (7) può anche riscriversi nella forma[2]

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \left[\left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k''}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\vec{v}_k''}{dt} - \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \right)^2 \right] = 0 \tag{8}$$

Quest'ultima ci consente di dedurre le seguenti importanti disuguaglianze

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \right)^2 < \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\vec{v}_k''}{dt} - \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \right)^2 \quad , \tag{9a}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k''}{dt} \right)^2 < \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\vec{v}_k''}{dt} - \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \right)^2 \quad . \tag{9b}$$

Dalla (9b) deduciamo che:

> Per un sistema di masse puntiformi, la differenza tra l'accelerazione $\vec{a}_k = d\vec{v}_k/dt$ del movimento reale e quella $\vec{a}_k'' = d\vec{v}_k''/dt$ del medesimo, ma con un numero ridotto di vincoli, è inferiore alla differenza tra $\vec{a}_k''$ e l'accelerazione che compete alle masse per una qualsivoglia distribuzione di forze esterne.

Se immaginiamo di eliminare dal sistema <u>tutti</u> i vincoli, ed indichiamo con

$$\vec{a}_k'' = \frac{d\vec{v}_k''}{dt} = \frac{\vec{F}_k^e}{m_k}$$

le accelerazioni che si registrano in tal caso, la disuguaglianza condurrà al principio di Gauss, secondo cui

> Per un movimento reale la funzione
>
> $$\boxed{Z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\vec{a}_k - \frac{\vec{F}_k^e}{m_k} \right) \cdot \left(\vec{a}_k - \frac{\vec{F}_k^e}{m_k} \right)} \tag{10}$$
>
> attinge ad un valore di minimo assoluto[3].

[2] Il seguente sviluppo giustifica l'affermazione:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} - 2\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k''}{dt} + \cancel{\frac{d\vec{v}_k''}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k''}{dt}} \\
&\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} - 2\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k'}{dt} + \cancel{\frac{d\vec{v}_k'}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k'}{dt}} \\
&- \cancel{\frac{d\vec{v}_k''}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k''}{dt}} + 2\frac{d\vec{v}_k''}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k'}{dt} - \cancel{\frac{d\vec{v}_k'}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k'}{dt}} \\
&= 2\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} - 2\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k''}{dt} - 2\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k'}{dt} + 2\frac{d\vec{v}_k''}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \\
&= 2\left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k''}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} - \frac{d\vec{v}_k'}{dt} \right)
\end{aligned}$$

[3] La lettera Z è stata probabilmente scelta da Gauss poiché *Zwang* esprime in tedesco il concetto di *coercizione*, *vincolo*.

2 L'equazione di Udwadia-Kalaba

In <u>assenza di vincoli</u> il moto dei punti materiali che compongono il sistema sarebbe regolato dalle equazioni[4] differenziali

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{f} \tag{11}$$

con $\mathbf{M}$ matrice delle masse,

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_N \end{array} \right\} \tag{12}$$

vettore delle forze.

Secondo il principio di Gauss,

> Fra tutte le accelerazioni compatibili con i vincoli cui è soggetto il sistema di masse, l'unica che si realizza è quella che rende minima la funzione scalare:
>
> $$Z\left(\ddot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{a}\right)\mathbf{M}\left(\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{a}\right) \tag{13}$$
>
> definita Gaussiana del sistema.

Gauss enunciò questo principio fondamentale della meccanica in un breve lavoro del 1829. Tale principio è applicabile qualsiasi sia il tipo di vincolo cui è sottoposto il sistema.

Se si impone sia

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\mathbf{a} \tag{15}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_p = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}\ddot{\mathbf{q}} \tag{16}$$

la (13) si riscrive nella forma

$$Z = \frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{q}}_p - \mathbf{a}_p\right)^T\left(\ddot{\mathbf{q}}_p - \mathbf{a}_p\right) \tag{17}$$

Nella dinamica multibody frequentemente i vincoli vengono espressi nella forma

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\gamma} \tag{18}$$

in cui

- $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{q}}$ è la matrice Jacobiana dei vincoli avente dimensione $m \times 3N$;
- $\boldsymbol{\gamma}$ è il termine quadratico delle velocità associato alle equazioni di vincolo.

[4] Nel prosieguo adotteremo la notazione matriciale.

Nella presente trattazione ipotizziamo che i vincoli siano tutti congruenti, anche se necessariamente non indipendenti.

Udwadia e Kalaba hanno dimostrato che le accelerazioni che soddisfano il principio di Gauss sono espresse dalla *equazione fondamentale* [2]:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a} + \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{\Psi_q} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \right)^{+} (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{\Psi_q a})} \tag{19}$$

in cui $(\cdot)^{+}$ rappresenta l'operazione di matrice pseudoinversa di Moore-Penrose.

Al fine di giustificare la (19) procediamo in due fasi, seguendo proprio l'approccio descritto in [2]:

1. dimostriamo che la (19) soddisfa le equazioni di vincolo (18);
2. verifichiamo che la $\ddot{\mathbf{q}}$, calcolata tramite la (19), conduce ad un minimo della funzione Gaussiana G.

Se sostituiamo la (19) nella (18)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Psi_q a} + \mathbf{\Psi_q M}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{\Psi_q M}^{-\frac{1}{2}} \right)^{+} (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{\Psi_q a}) \\
&= \left[\mathbf{I} - \mathbf{\Psi_q M}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{\Psi_q M}^{-\frac{1}{2}} \right)^{+} \right] \mathbf{\Psi_q a} + \mathbf{\Psi_q M}^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{\Psi_q M}^{-\frac{1}{2}} \right)^{+} \boldsymbol{\gamma} && (20) \\
&= \boldsymbol{\gamma} && (21)
\end{aligned}$$

si perviene ad un'identità. Resta quindi dimostrato che (19) soddisfa le equazioni di vincolo.

Per la seconda parte della dimostrazione, introduciamo un vettore $\ddot{\mathbf{u}}$ che:

- soddisfi le equazioni di vincolo, ovvero $\mathbf{\Psi_q} \ddot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\gamma}$
- differisca di una quantità $\mathbf{v}$ dalla $\ddot{\mathbf{q}}$ espressa dalla (19), ovvero

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{v} \tag{22}$$

3 Esempio

Una semplice applicazione del principio di Gauss à data dalla deduzione delle equazioni del moto di un pendolo semplice. Con riferimento allo schema di Figura 2 sia:

- m la massa;
- a^t ed a^n le componenti dell'effettiva accelerazione della massa;
- g l'accelerazione di gravità;
- ϕ l'angolo del filo con la normale

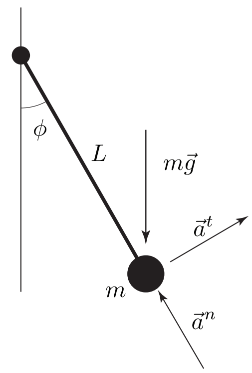

Figura 2: Pendolo semplice: Nomenclatura

- $F^n = mg\cos\phi$, componente normale della forza peso;
- $F^t = mg\sin\phi$, componente tangenziale della forza peso;

Sviluppando la funzione

$$Z = \frac{m}{2}\sum_{k=n,t}\left(a^k - \frac{F^k}{m}\right)^2 \tag{23}$$

si ottiene

$$Z = \frac{m}{2}\left[\left(a^t + g\sin\phi\right)^2 + (a^n + g\cos\phi)^2\right] \tag{24}$$

Per minimizzare Z dovremo imporre

$$\delta Z = \frac{\partial Z}{\partial a^t}\delta a^t + \frac{\partial Z}{\partial a^n}\delta a^n = 0 \tag{25}$$

Essendo

$$\delta a^n = 0 \tag{26a}$$
$$\delta a^t = L\delta\ddot{\phi} \tag{26b}$$

la (25) diventa

$$\begin{aligned}\delta Z =& m\left(a^t + g\sin\phi\right)\delta a^t\\ =& m\left(L\ddot{\phi} + g\sin\phi\right)L\delta\ddot{\phi} = 0\end{aligned} \tag{27}$$

ovvero, essendo $\delta\ddot{\phi}$ arbitrario,

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0 \tag{28}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Raam, E., Principles of Least Action and of Least Constraint, GAMM-Mitt. 34, No. 2, 164 – 182 (2011)

[2] Udwadia, F.E., Kalaba, R.E., *Dinamica Analitica - Un nuovo approccio*, a cura di D. de Falco, Edizione EdiSES, Napoli, 2009