Proprietà dei moti finiti

Ettore Pennestrì
Università di Roma Tor Vergata
Dipartimento di Ingegneria dell'Impresa

Sommario

Il presente documento, redatto per gli allievi dei corsi di Prototipazione Virtuale e Simulazione dei Sistemi Meccanici e Bioprotesi, è ad integrazione dei contenuti del testo ed a supporto delle lezioni frontali.

1 Formula di Rodrigues

Indicati con

- $\vec{u}$, versore dell'asse di rotazione;
- θ, angolo di rotazione;
- $\vec{r}_0$ ed $\vec{r}_1$, posizione iniziale e finale di un generico vettore solidale con il corpo mobile;
- $\vec{q}_0$, vettore proiezione di $\vec{r}_0$ su un piano ortogonale ad $\vec{u}$;

la formula di Rodrigues, con riferimento alla nomenclatura di Figura 1, viene frequentemente espressa nella seguente forma algebrica

$$\vec{r}_1 = (\vec{r}_0 \cdot \vec{u})\,\vec{u} + \cos\theta\vec{q}_0 + \sin\theta\,(\vec{u} \times \vec{q}_0) \tag{1}$$

con

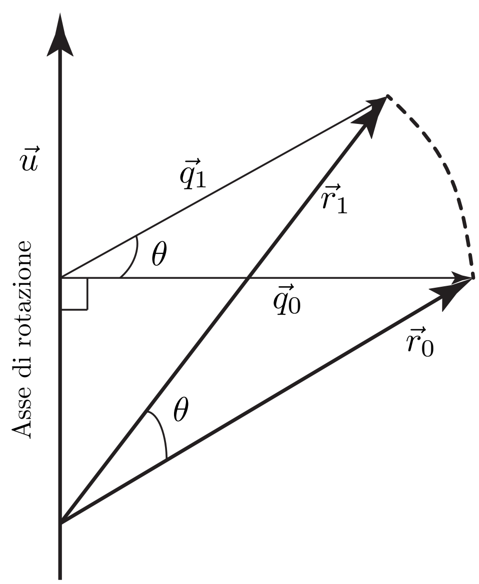

Figura 1: Formula di Rodrigues: Nomenclatura

Se teniamo conto dell'uguaglianza

$$\vec{q}_0 = \vec{r}_0 - (\vec{u} \cdot \vec{r}_0)\,\vec{u} \tag{2}$$

avremo

$$\vec{r}_1 = \cos\theta\vec{r}_0 + (\vec{r}_0 \cdot \vec{u})\,(1 - \cos\theta)\,\vec{u} + \sin\theta\,(\vec{u} \times \vec{r}_0) \tag{3}$$

La forma appena ottenuta può essere ulteriormente semplificata sostituendo le identità trigonometriche

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\sin\theta &= \frac{2t}{1+t^2} \\
1-\cos\theta &= \frac{2t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

con $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$,

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{r}_0 + (\vec{r}_0\cdot\vec{u})\,\frac{2t^2}{1+t^2}\vec{u} + \frac{2t}{1+t^2}\,(\vec{u}\times\vec{r}_0) \\
&= \frac{1}{1+t^2}\left[\vec{r}_0 - r_0 t^2 + 2t\vec{u}\times\vec{r}_0 + 2\,(\vec{r}_0\cdot\vec{u})\,\vec{u}t^2\right]
\end{aligned}$$

Osserviamo che è

$$t\vec{u}\times(t\vec{u}\times\vec{r}_0) = (\vec{u}\cdot\vec{r}_0)\,t^2\vec{u} - t^2\vec{r}_0 \tag{4}$$

per cui la precedente diventa

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \frac{1}{1+t^2}\left[r_0 + t^2 r_0 - 2t^2 r_0 + 2\,(\vec{r}_0\cdot\vec{u})\,t^2\vec{u} + 2t\vec{u}\times\vec{r}_0\right] \\
&= \frac{1}{1+t^2}\left[\left(1+t^2\right) r_0 + 2t\vec{u}\times(\vec{r}_0 + t\vec{u}\times\vec{r}_0)\right]
\end{aligned}$$

ovvero

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \frac{2t}{1+t^2}\vec{u}\times(\vec{r}_0 + t\vec{u}\times\vec{r}_0) \tag{5}$$

Se si introduce il *vettore rotazione finita*

$$\vec{\Theta} = 2\tan\frac{\theta}{2}\vec{u}\ , \tag{6}$$

la cui direzione coincide con quella dell'asse $\vec{u}$ ed ha modulo

$$\Theta = 2\tan\frac{\theta}{2} = 2t\ , \tag{7}$$

la (5) si riscrive nella forma

$$\boxed{\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \frac{\vec{\Theta}}{1+\frac{1}{4}\Theta^2}\times\left(\vec{r}_0 + \frac{\vec{\Theta}}{2}\times\vec{r}_0\right)} \tag{8}$$

L'asse di rotazione $\vec{u}$ può esprimersi nel riferimento Cartesiano $o-xyz$ nella forma

$$\vec{u} = \vec{i}_1\cos\alpha + \vec{i}_2\cos\beta + \vec{i}_3\cos\gamma\ , \tag{9}$$

con $\vec{\mathrm{i}}_1$, $\vec{\mathrm{i}}_2$ e $\vec{\mathrm{i}}_3$ versori degli assi.

Per analogia, il vettore rotazione finita assume la forma

$$\vec{\Theta} = \vec{i}_1\Theta_1 + \vec{i}_2\Theta_2 + \vec{i}_3\Theta_3 \tag{10}$$

ove

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos\alpha\\ \Theta_2 &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos\beta\\ \Theta_3 &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos\gamma\end{aligned}$$

sono le componenti del vettore $\vec{\Theta}$. Tali componenti, tuttavia, non devono essere interpretate quali angoli di rotazione attorno agli assi.

2 Parametri di Eulero o di Rodrigues-Hamilton

Ammettiamo che il generico vettore $\vec{r}$ sia solidale con il riferimento mobile $o{-}xyz$ in cui $\vec{i}_s$ $(s = 1, 2, 3)$ è il generico versore di uno degli assi coordinati.

Applicando una rotazione finita caratterizzata dal vettore $\vec{\Theta}$ si ha

$$\vec{i}_s{}' = \vec{i}_s + \frac{\vec{\Theta}}{1+\frac{1}{4}\Theta^2} \times \left(\vec{i}_s + \frac{1}{2}\vec{\Theta} \times \vec{i}_s\right) \ , \tag{11}$$

in cui l'apice $'$ indica la posizione del vettore dopo la rotazione finita.

Se adesso applichiamo la rotazione caratterizzata dal vettore $-\vec{\Theta}$, l'asse $\vec{i}_s{}'$ ritornerà nella primitiva posizione $\vec{i}_s$, per cui

$$\vec{i}_s = \vec{i}_s{}' - \frac{\vec{\Theta}}{1+\frac{1}{4}\Theta^2} \times \left(\vec{i}_s{}' - \frac{\vec{\Theta}}{2} \times \vec{i}_s{}'\right) \ . \tag{12}$$

Dalle (11) ed (12) si deduce

$$\boxed{\vec{\Theta}\cdot\vec{i}_s = \vec{\Theta}\cdot\vec{i}_s{}'} \tag{13}$$

ovvero sono uguali le proiezioni dell'asse di rotazione sugli assi dei versori associati agli assi coordinati dei riferimenti fisso e mobile.

In virtù di (13), (10) può scriversi nelle due forme equivalenti

$$\vec{\Theta} = \Theta_1\vec{i}_1{}' + \Theta_2\vec{i}_2{}' + \Theta_3\vec{i}_3{}' = \Theta_1\vec{i}_+\Theta_2\vec{i}_2 + \Theta_3\vec{i}_3 \tag{14}$$

Al fine di superare taluni problemi che si presentano nella cinematica dei moti tridimensionali è opportuno

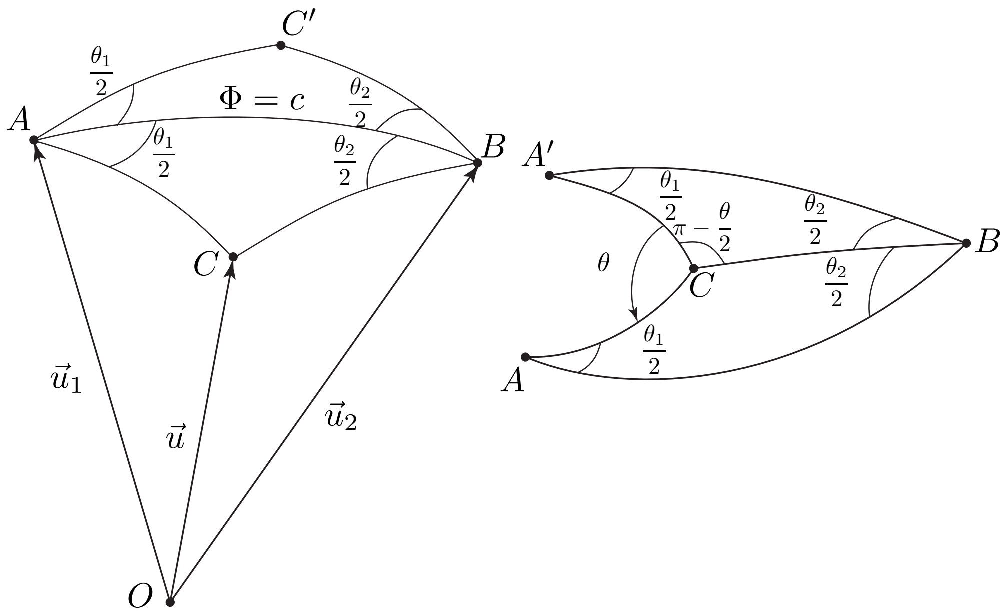

Figura 2: Geometria della composizione di moti finiti

3 Composizione di rotazioni finite

Si vuole ottenere una formula che consenta di calcolare il vettore rotazione risultante $\vec{\Theta}$ in funzione dei vettori $\vec{\Theta}_1 = 2\vec{u}_1 \tan\dfrac{\theta_1}{2}$ e $\vec{\Theta}_2 = 2\vec{u}_2 \tan\dfrac{\theta_2}{2}$, caratterizzanti moti finiti eseguiti in successione.

A tal fine, sia Φ l'angolo compreso tra gli assi di rotazione $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, per cui

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \cos\Phi \ , \tag{15a}$$

$$\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\| = \sin\Phi \ . \tag{15b}$$

Dalle geometrie della Figura 2, in cui sono rappresentate le due rotazioni, individuiamo il triangolo sferico ABC sulla sfera di raggio unitario e centro O.

Il punto $A(B)$ rappresenta l'intersezione dell'asse $\vec{u}_1$ ($\vec{u}_2$) con la sfera unitaria, mentre il punto C è l'intersezione dell'asse $\vec{u}$ della rotazione risultante.

Dopo la prima rotazione, il punto C si porterà in C'. Dopo la seconda rotazione, C' ritornerà in C, mentre A si sposterà in A'.

Siano a, b, c le ampiezze dei lati del triangolo sferico opposti, rispettivamente, ai vertici A, B e C.

Le formule di trigonometria sferica utili ai nostri sviluppi sono

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C} \ , \tag{16a}$$

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}} \ , \tag{16b}$$

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos c \ . \tag{16c}$$

Le suddette formule possono specializzarsi per il caso in questione. Tenuto conto delle uguaglianze

$$\hat{A} = \frac{\theta_1}{2} \ ,$$

$$\hat{B} = \frac{\theta_2}{2} \ ,$$

$$\hat{C} = \pi - \frac{\theta}{2} \ ,$$

$$c = \Phi$$

si ha

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} - \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \Phi \ , \tag{17}$$

ovvero, per le (15), segue

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2 \right) \ . \tag{18}$$

Analogamente, dalle (16) segue

$$\sin a = \sin c \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} = \sin \Phi \frac{\sin \dfrac{\theta_1}{2}}{\sin \dfrac{\theta}{2}} \ , \tag{19}$$

$$\sin b = \sin c \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \sin \Phi \frac{\sin \dfrac{\theta_2}{2}}{\sin \dfrac{\theta}{2}} \ . \tag{20}$$

La posizione del versore $\vec{u}$ dell'asse della rotazione risultante può essere espressa quale combinazione lineare di tre vettori non complanari

$$\vec{u} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_2 \times \vec{u}_1 \ , \tag{21}$$

con α, β, γ coefficienti incogniti.

Osserviamo che il coefficiente γ dovrà essere positivo in quanto $\vec{u}$ (v. Figura 2) si trova dalla parte di $\vec{u}_2 \times \vec{u}_1$. Il caso $\gamma < 0$ varrà se l'ordine di rotazione è invertito.

Poiché il modulo di $\vec{u}$ è unitario, vale l'uguglianza

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \, (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + \gamma^2 \|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2 = 1 \ ,$$

da cui

$$\gamma = \frac{1}{\sin\Phi}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta\left(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right)}\ . \tag{22}$$

Al fine di calcolare α e β moltiplichiamo scalarmente ambo i membri della (21) una volta per $\vec{u}_2 \times (\vec{u}_2 \times \vec{u}_1)$ e la seconda per $\vec{u}_1 \times (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$, in tal modo si isoleranno le incognite α e β.

Per comodità svilupperemo a parte alcuni prodotti che si presenteranno nel corso dell'operazione:

$$\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_2\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] = \alpha\vec{u}_1\left[\vec{u}_2\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] \tag{23}$$

$$\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] = \beta\vec{u}_2\left[\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_2\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] = \vec{u}\left[\left(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right)\vec{u}_2-\vec{u}_1\right]\\
&= \left(\vec{u}\cdot\vec{u}_2\right)\left(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right)-\left(\vec{u}\cdot\vec{u}_1\right)\\
&= \cos a\cos\Phi-\cos b = -\sin a\sin\Phi\cos\frac{\theta_2}{2}
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] = \left(\vec{u}\cdot\vec{u}_2\right)-\left(\vec{u}\cdot\vec{u}_1\right)\left(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right)\\
&= \cos a-\cos b\cos\Phi = \sin b\sin\Phi\cos\frac{\theta_1}{2}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\vec{u}_1\cdot\left[\vec{u}_2\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] = \left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\cdot\left(\vec{u}_2\times\vec{u}_1\right) = -\sin^2\Phi \tag{27}$$

$$\vec{u}_2\cdot\left[\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right] = \left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\cdot\left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right) = \sin^2\Phi \tag{28}$$

Dalle (23), (25) ed (27), tenuto conto delle (16b) e (19), segue

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_2\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right]}{\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_2\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right]}\\
&= \frac{-\sin a\sin\Phi\cos\dfrac{\theta_2}{2}}{-\sin^2\Phi} = \frac{\sin a}{\sin\Phi}\cos\frac{\theta_2}{2}\\
&= \frac{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta_2}{2}\ .
\end{aligned} \tag{29}$$

Analogamente, dalle (24), (26) e (28), tenuto conto delle (16b) e e (20), segue

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\vec{u}\cdot\left[\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right]}{\vec{u}_2\left[\vec{u}_1\times(\vec{u}_2\times\vec{u}_1)\right]}\\
&= \frac{\sin b\sin\Phi\cos\dfrac{\theta_2}{2}}{\sin^2\Phi} = \frac{\sin b}{\sin\Phi}\cos\frac{\theta_1}{2}\\
&= \frac{\sin\dfrac{\theta_2}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta_1}{2}\ .
\end{aligned} \tag{30}$$

Infine, sostituendo le (29) ed (30) nella (22), si ha

$$\gamma = \frac{1}{\sin\Phi \sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} - \sin^2\frac{\theta_2}{2}\cos^2\frac{\theta_1}{2} - 2\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}} \tag{31}$$

Quest'ultima, per l'identità trigonometrica $\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2}$ e tenuta presente la (18), si semplifica nella seguente:

$$\gamma = \frac{\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \ . \tag{32}$$

Grazie alle (29), (30) ed (32), la (21) può riscriversi nella forma

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\vec{u}_1 \sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + \vec{u}_2 \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} + (\vec{u}_2 \times \vec{u}_1)\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right] \\ &= \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1\right) \ .\end{aligned} \tag{33}$$

Tenuta presente la (18), la (33) diventa

$$\boxed{\vec{\Theta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}\left(\vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1\right)} \tag{34}$$

Se le rotazioni avvengono attorno al medesimo asse, la (34) si specializza nella

$$\vec{\Theta} = 2\vec{u}\tan\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \ , \tag{35}$$

che costituisce un'ulteriore conferma della correttezza del risultato raggiunto.

Dalla (34) possono ottenersi delle interessanti relazioni che consentono di determinare le caratteristiche del vettore rotazione $\vec{\Theta}_1$ ($\vec{\Theta}_2$) conoscendo il vettore rotazione risultante $\vec{\Theta}$ e la $\vec{\Theta}_2$ ($\vec{\Theta}_1$).

Consideriamo, ad esempio, la sequenza di rotazioni $-\vec{\Theta}_1$, $\vec{\Theta}_1$, $\vec{\Theta}_2$, equivalente a $\vec{\Theta}_2$. Nella relazione (34) opereremo le seguenti sostituzioni

$$\begin{array}{ccc} \vec{\Theta} & \vec{\Theta}_1 & \vec{\Theta}_2 \\ \vec{\Theta}_2 & -\vec{\Theta}_1 & \vec{\Theta} \end{array}$$

per cui

$$\boxed{\vec{\Theta}_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}}\left(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_1 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_1 \times \vec{\Theta}\right) \ .} \tag{36}$$

Se invece sono note la seconda rotazione $\vec{\Theta}_2$ e quella risultante $\vec{\Theta}$, la $\vec{\Theta}_1$ discende dalla (34) operando le seguenti sostituzioni

$$\begin{array}{ccc} \vec{\Theta} & \vec{\Theta}_1 & \vec{\Theta}_2 \\ \vec{\Theta}_1 & -\vec{\Theta}_2 & \vec{\Theta} \end{array}$$

per cui

$$\boxed{\vec{\Theta}_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\vec{\Theta}_2 \cdot \vec{\Theta}} \left(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_2 - \frac{1}{2}\vec{\Theta} \times \vec{\Theta}_2 \right) \ .} \tag{37}$$

4 Rotazioni finite commutative

Si è affermato che le rotazioni finite non sono commutative.

Tale affermazione, tuttavia, richiede che gli assi di rotazione non vengano considerati solidali con il corpo mobile.

Se tale ipotesi viene abbandonata, dimostreremo che le rotazioni finite sono commutative.

La Figura 3 offre un esempio di tale proprietà.

In particolare, occorrerà dimostrare che la sequenza di rotazioni

$$\vec{\Theta}_1 = 2\vec{u}_1 \tan\frac{\theta_1}{2} \ , \tag{38a}$$

$$\vec{\Theta}_2 = 2\vec{u}_2 \tan\frac{\theta_2}{2} \ , \tag{38b}$$

è equivalente alla sequenza

$$\vec{\Theta}'_1 = 2\vec{u}_2 \tan\frac{\theta_2}{2} \ , \tag{39a}$$

$$\vec{\Theta}'_2 = 2\vec{u}'_1 \tan\frac{\theta_1}{2} \ , \tag{39b}$$

essendo $\vec{u}'_1$ la posizione in cui si sposterà $\vec{u}_1$ a seguito della rotazione caratterizzata dal vettore $\vec{\Theta}'_1 = \vec{\Theta}_2$, ovvero, applicando la formula di Rodrigues,

$$\vec{u}'_1 = \vec{u}_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2} \vec{\Theta}_2 \times \left(\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{u}_1 \right) \ . \tag{40}$$

Sostituendo la (40) in (39b) si ha

$$\vec{\Theta}'_2 = \vec{\Theta}_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2} \vec{\Theta}_2 \times \left(\vec{\Theta}_1 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1 \right) \ . \tag{41}$$

Al termine entro parentesi possiamo aggiungere $\vec{\Theta}_2$ in quanto $\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_2 = 0$, per cui la (41) diventa

$$\vec{\Theta}'_2 = \vec{\Theta}_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2} \vec{\Theta}_2 \times \left(\vec{\Theta}_1 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 \right) \ . \tag{42}$$

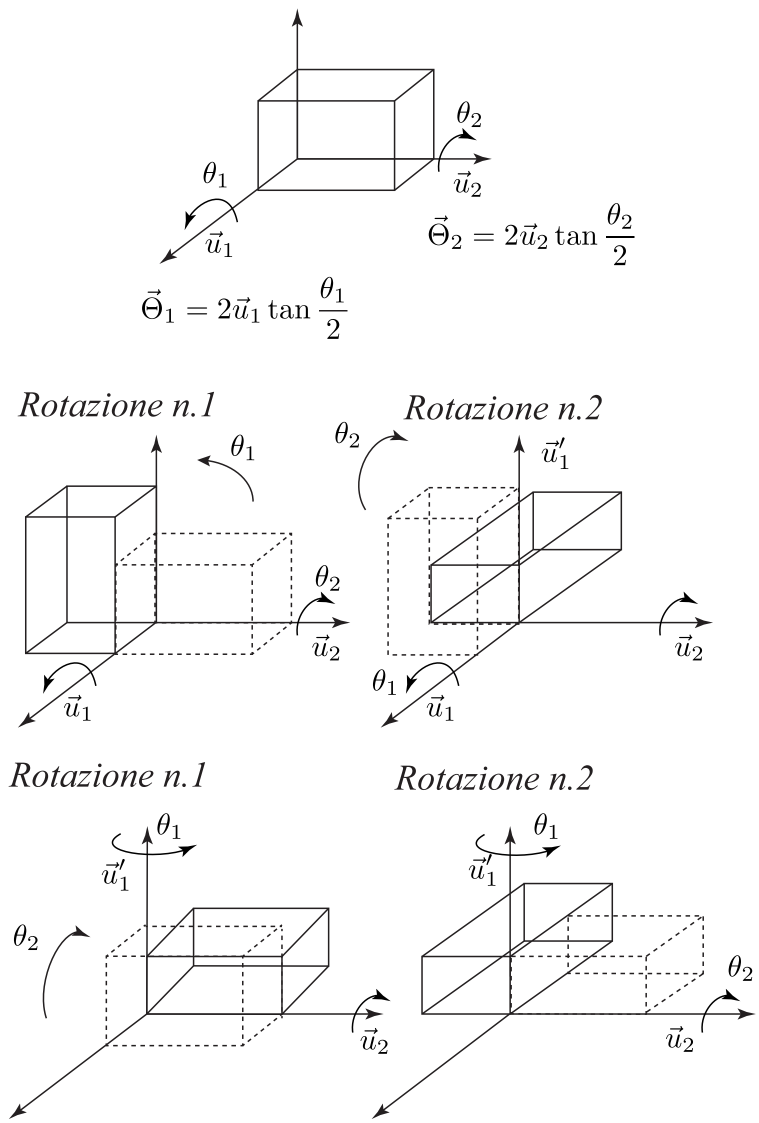

Figura 3: Composizione di spostamenti finiti

Il termine entro le parentesi, in virtù delle (34), vale

$$\vec{\Theta}_1 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 = \left(1 + \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\vec{\Theta}\ , \tag{43}$$

per cui la (42) diventa

$$\vec{\Theta}_2' = \vec{\Theta}_1 + \frac{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}{1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}\ . \tag{44}$$

Quest'ultima, stante l'uguaglianza

$$\vec{\Theta}_1' = \vec{\Theta}_2\ , \tag{45}$$

condurrà a

$$\vec{\Theta}_1' \cdot \vec{\Theta}_2' = \vec{\Theta}_2 \cdot \vec{\Theta}_2' = \vec{\Theta}_2 \cdot \vec{\Theta}_1\ . \tag{46}$$

Possiamo adesso costruire il vettore rotazione $\vec{\Theta}'$ risultante della sequenza $\vec{\Theta}_1'$ e $\vec{\Theta}_2'$:

$$\vec{\Theta}' = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1' \cdot \vec{\Theta}_2'}\left(\vec{\Theta}_1' + \vec{\Theta}_2' + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2' \times \vec{\Theta}_1'\right) \tag{47}$$

Sostituiamo (44), (45) e (46) in (47) ed otterremo

$$\begin{aligned}\vec{\Theta}' =& \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}\left[\vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 + \frac{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}{1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_1 \times \vec{\Theta}_2 + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}{1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2}\left(\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}\right) \times \vec{\Theta}_2\right]\ .\end{aligned} \tag{48}$$

Tale espressione può essere manipolata come di seguito illustrato

$$\begin{aligned}\vec{\Theta}' =& \frac{1}{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)}\left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)}\vec{\Theta}_2 \times \left[\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1\vec{\Theta}_2\right)\vec{\Theta}\right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\left(\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)\vec{\Theta}_1\right] \\ &+ \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}\left(\vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2\right)\end{aligned} \tag{49}$$

Tenuto conto dell'uguaglianza espressa nella nota a piè di pagina [1]

$$
\begin{aligned}
\vec{\Theta}' =& \vec{\Theta} - \frac{\vec{\Theta}_2}{\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)} \times \left[\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\vec{\Theta}\right. \\
& - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\left(\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)\vec{\Theta}_1 \\
& \left. -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)\vec{\Theta}_1\right]
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\Theta}' =& \vec{\Theta} - \frac{\vec{\Theta}_2}{\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)} \times \left[\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1\vec{\Theta}_2\right)\vec{\Theta}\right. \\
& \left. -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\left(\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}\right) - \left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)\vec{\Theta}_1\right]
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Tenuto conto che è

$$
\vec{\Theta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}\left(\vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1\right) \tag{52}
$$

possiamo espandere il termine tra parentesi quadre della (51)

$$
\begin{aligned}
& \vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 + \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1 - \frac{1}{2}\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_2 \times \left(\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1\right) - \left(1 + \frac{1}{4}\Theta_2^2\right)\vec{\Theta}_1 \\
& = \vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 - \frac{1}{4}\left(\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)\vec{\Theta}_2 - \frac{1}{4}\Theta_2^2\vec{\Theta}_1 - \vec{\Theta}_1 - \frac{1}{4}\Theta_2^2\vec{\Theta}_1 \\
& = \vec{\Theta}_2\left(1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2\right)
\end{aligned}
\tag{53}
$$

La conclusione è che il termine tra le parentesi è un vettore parallelo a $\vec{\Theta}_2$, per cui il prodotto vettoriale presente nella (50) è nullo e sussiste l'uguaglianza

$$
\vec{\Theta}' = \vec{\Theta} \ , \tag{54}
$$

che dimostra l'equivalenza delle due sequenze di rotazioni espresse, rispettivamente, da (38a), (38b) e (39a), (39b).

[1]
$$
\frac{1}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}\left(\vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2\right) = \vec{\Theta} - \frac{\frac{1}{2}\left(\vec{\Theta}_2 \times \vec{\Theta}_1\right)}{1 - \frac{1}{4}\vec{\Theta}_1 \cdot \vec{\Theta}_2}
$$